

Geometria (dla) mas

Dawid Nowak

Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

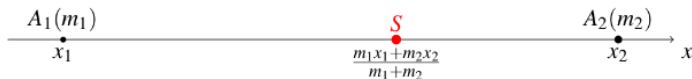
20.01.2025

- ❶ Wstęp
- ❷ Teoria
- ❸ Przykład
- ❹ Bibliografia

Artykuł "Geometria (dla) mas" autorstwa Bartłomieja Bzdęgi, opublikowany na Poznańskim Portalu Matematycznym, omawia pojęcie środka masy inaczej barycentrum w kontekście geometrycznym. Wyjaśnia, jak pojęcie środka masy można zastosować w różnych kontekstach geometrycznych, ilustrując to odpowiednimi przykładami i wzorami.

Zaczynając od początku, wyobraźmy sobie, że mamy układ dwóch punktów materialnych o jednakowej masie. Wówczas jasnym jest, że środek masy tego układu jest środkiem odcinka łączącego te punkty.

Nieco inaczej jest w przypadku, w którym dane dwa punkty mają różne masy. Niech będą to punkty A_1 i A_2 o dodatnich masach odpowiednio m_1 i m_2 . Umieśćmy je na osi liczbowej, nadając im współrzędne odpowiednio x_1 i x_2 . Literą S oznaczmy barycentrum tych dwóch punktów.



Założmy na początku, że m_1 i m_2 są liczbami naturalnymi. Punkt A_1 możemy potraktować jako m_1 mas jednostkowych położonych na współrzędnej x_1 , analogicznie z punktem A_2 . Zatem średnie położenie masy to

$$\frac{\overbrace{x_1 + x_1 + \dots + x_1}^{m_1 \text{ razy}} + \overbrace{x_2 + x_2 + \dots + x_2}^{m_2 \text{ razy}}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Współrzędna punktu S jest więc średnią ważoną liczb x_1 i x_2 , z wagami odpowiednio m_1 i m_2 . Wzór ten stosujemy także gdy m_1 i m_2 nie są liczbami naturalnymi.

Możemy założyć, zgodnie z tym, co sugeruje rysunek, że $x_1 < x_2$.
Wówczas

$$x_1 < \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} < x_2$$

więc środek masy, czego należało się spodziewać, leży pomiędzy punktami A_1 i A_2 .

Prosty rachunek daje ponadto następujące zależności:

$$m_1 \cdot |SA_1| = m_1 \cdot \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} - x_1 \right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (x_2 - x_1),$$
$$m_2 \cdot |SA_2| = m_2 \cdot \left(x_2 - \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (x_2 - x_1).$$

Zatem

$$m_1 \cdot |SA_1| = m_2 \cdot |SA_2|$$

lub równoważnie

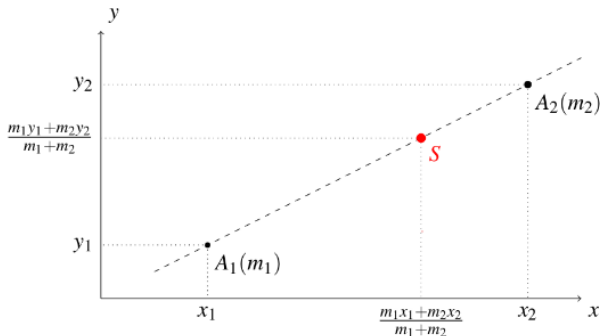
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|SA_2|}{|SA_1|}$$

To oznacza, że w układzie dwóch punktów materialnych odległość barycentrum od każdego z nich jest odwrotnie proporcjonalna do jego masy. To zgodne z intuicją im bardziej masywny punkt, tym bliżej niego położony jest środek masy. Można zauważyć, że równość $m_1|SA_1|=m_2|SA_2|$ przypomina zasadę dźwigni dwustronnej. Punkt S jest takim punktem podparcia kładki A_1A_2 , na której końcach znajdują się masy m_1 i m_2 , dla którego znajduje się ona w stanie równowagi, przy czym masę samej kładki tu zanedbujemy.

Zwiększymy teraz liczbę wymiarów: umieścimy punkty na płaszczyźnie. To samo możemy zrobić w przestrzeni, nawet n -wymiarowej, ale dla jasności rozważań poprzestaniemy na dwóch wymiarach. Wówczas barycentrum punktów $A_1=(x_1,y_1)$ z masą m_1 i $A_2=(x_2,y_2)$ z masą m_2 jest punkt

$$S = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \right)$$

Jego współrzędne wyznaczamy dokładnie tak samo jak w przypadku jednowymiarowym na osi liczbowej. Wyznaczamy średnią współrzędną x oraz średnią współrzędną y masy całego układu.



Powyższe definicje uogólniają się w naturalny sposób na większą liczbę punktów. Barycentrum układu punktów

$$A_i = (x_i, y_i) \text{ z masą } m_i, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n$$

jest punkt

$$S = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \right).$$

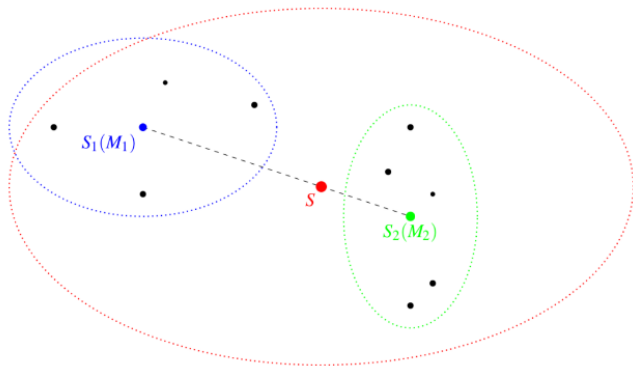
Jako przykład podajemy środek ciężkości trójkąta. Umieszczając w każdym wierzchołku trójkąta ABC jednakową masę m , otrzymamy barycentrum w punkcie

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{mx_A + mx_B + mx_C}{m + m + m}, \frac{my_A + my_B + my_C}{m + m + m} \right) = \\ &= \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right) \end{aligned}$$

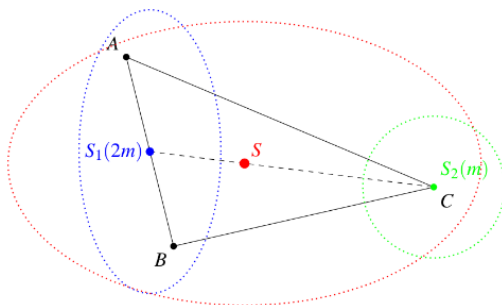
przy czym $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$ i $C=(x_C, y_C)$. Jest to dobrze znany wzór na środek ciężkości trójkąta w układzie współrzędnych

Twierdzenie 1

Podzielmy dany zbiór punktów z masami na dwa niepuste podzbiory. Niech jeden z nich ma łączną masę M_1 i środek masy S_1 , a drugi łączną masę M_2 i środek masy S_2 . Wówczas środek S masy całego zbioru pokrywa się z barycentrum punktów S_1 i S_2 , z masami odpowiednio M_1 i M_2 .



Aby zademonstrować siłę tego twierdzenia, popatrzmy jeszcze raz na środek ciężkości trójkąta ABC czyli barycentrum punktów A , B i C o jednakowej masie m . Niech A i B stanowią pierwszy (niebieski) podzbiór, a pojedynczy punkt C drugi (zielony). Środkiem S_1 niebieskiego układu jest środek odcinka AB , cały układ ma masę $2m$. Środkiem zielonego układu jest punkt $S_2 = C$, cały układ ma masę m .



Wobec tego oraz na mocy twierdzenia 1, środek S ciężkości trójkąta leży na środkowej CS_1 boku AB , w dodatku spełnia warunek

$$\frac{|CS|}{|SS_1|} = \frac{2m}{m} = 2$$

Wnioski z Twierdzenia 1:

Niech S będzie barycentrum pewnego zbioru punktów z masami. Podzielmy ten zbiór na dwa podzbiory, jeden o środku masy S_1 , drugi S_2 . Wówczas punkty S_1 , S i S_2 leżą na jednej prostej (są współliniowe).

Jeśli zbiór z poprzedniego punktu jest dość duży, to możemy podzielić go na dwa podzbiory na wiele sposobów. Każdy podział wyznaczy nam pewną prostą. Wszystkie otrzymane w ten sposób proste przechodzą przez jeden punkt (są współpękowe), a punktem tym jest S .

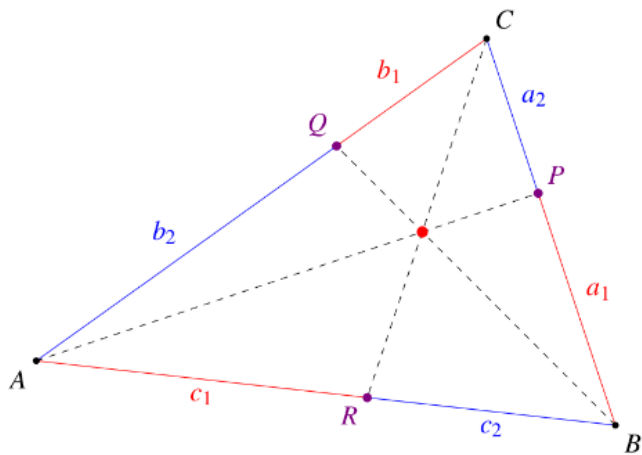
Klasycznym przykładem zastosowania tych wniosków jest następujące twierdzenie, odwrotne do twierdzenia Cevy.

Twierdzenie 2

Na bokach BC , CA i AB trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty P , Q i R . Jeśli zachodzi równość

$$|AR| \cdot |BP| \cdot |CQ| = |AQ| \cdot |BR| \cdot |CP|$$

to odcinki AP , BQ i CR przecinają się w jednym punkcie.



Twierdzenie 3

Środek masy jednorodnej płytki w kształcie trójkąta ABC pokrywa się z barycentrum punktów A , B i C , wziętych z jednakowymi masami.

Na koniec zajmiemy się następującym zagadnieniem:
Ile wody należy nalać do szklanki, aby środek masy szklanki z wodą
był położony jak najniżej?

Zaczniemy naturalnie od pustej szklanki. Z łatwością możemy zmierzyć jej masę M , wysokość h oraz promień denka r . Zakładamy przy tym, że szklanka ma kształt matematycznej powierzchni walca z jedną podstawą, wykonana jest z substancji jednorodnej, a jej ściany są zaniedbywalnie cienkie. Wówczas masa każdego kawałka szklanki jest proporcjonalna do pola powierzchni tego kawałka.

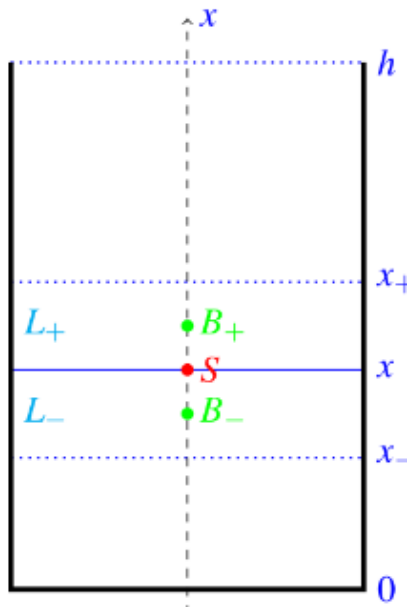
Jest rzeczą jasną, że barycentrum szklanki, zarówno pustej jak i pełnej, leży na jej osi obrotu. Interesuje nas zatem tylko jedna współrzędna: wysokość. Denko szklanki ma masę proporcjonalną do πr^2 , a środek jego masy znajduje się na wysokości 0. Masa powierzchni bocznej szklanki jest proporcjonalna do $2\pi rh$, jej barycentrum znajduje się na wysokości $\frac{1}{2}h$. W takim razie barycentrum pustej szklanki jest na wysokości

$$\begin{aligned} H &= \frac{0 \cdot \pi r^2 + \frac{1}{2}h \cdot 2\pi rh}{\pi r^2 + 2\pi rh} = \\ &= \frac{h^2}{r + 2h} \end{aligned}$$

Dalej będziemy zakładać, że po prostu znamy H i M .

Jeśli nalejemy do szklanki bardzo niewiele wody, to barycentrum układu znajdzie się nad powierzchnią wody. Natomiast dla pełnej szklanki barycentrum układu jest pod powierzchnią wody. W miarę napełniania szklanki położenie barycentrum oraz powierzchni wody zmieniają się w sposób ciągły. Zatem z własności Darboux w pewnej chwili barycentrum układu znajdzie się na powierzchni wody. Oznaczmy przez x poziom wody o tej własności.

Niech nadto $x_- < x < x_+$. Przez S_- , S i S_+ oznaczmy barycentra układu szklanki i wody wlanej do poziomu odpowiednio x_- , x i x_+ . Niech B_+ będzie barycentrum samej warstwy L_+ wody pomiędzy poziomami x i x_+ , analogicznie B dla warstwy L_- pomiędzy x_- i x .



Układ szklanki z wodą do poziomu x_+ potraktujemy jako sumę układu szklanki z wodą do poziomu x oraz warstwy L_+ . Z tego wnioskujemy, że punkt S_+ leży na odcinku SB_+ . Podobnie szklanka z wodą do poziomu x jest sumą układu szklanki z wodą do poziomu x_- oraz warstwy L_- , więc punkt S leży na odcinku $S B$. To rozumowanie dowodzi, że S_+ i S_- są położone wyżej niż S , zatem środek masy układu jest najniżej, gdy znajduje się na powierzchni wody.

Masa wlanej wody, czy jakiegokolwiek innej cieczy, jest równa $\pi r^2 x p$, gdzie p oznacza jej gęstość. Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy

$$A = \frac{M}{\pi r^2}$$

czyli masa cieczy wynosi Mx/A . Barycentrum samej cieczy znajduje się na wysokości $\frac{1}{2}x$. W takim razie należy rozwiązać równanie

$$\frac{MH + (Mx/A) \cdot \frac{1}{2}x}{M + Mx/A} = x$$

które po przekształceniu staje się równaniem kwadratowym $\frac{1}{2}x^2 + Ax - AH = 0$. Jedynym dodatnim rozwiązaniem tego równania jest

$$x = (A^2 + 2AH)^{\frac{1}{2}} - A$$

przy czym H oznacza wysokość barycentrum szklanki, zaś A ma ciekawą interpretację fizyczną: jeśli masa wlanej cieczy jest równa masie szklanki, to ciecz, o ile się nie wyleje, sięga do wysokości A .

Bibliografia:

<https://matematyka.poznan.pl/artykul/geometria-dla-mas/>